

Model Modifikasi GARCH Asimetris Berbasis Copula untuk Prediksi Ukuran Risiko Keuangan

(A Copula-Based Asymmetric Modified GARCH Model for Financial Risk Measure Prediction")

Nurhayati^{1,*}

Program Studi Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Almuslim
Jalan Tengku Abdurrahman No 37 Matangglumpangdua Bireuen, 24261, Indonesia

*Email korespondensi: nurhayati09.nur@gmail.com

Abstract

Volatility modeling is important in quantitative risk management because it reflects the dynamics of return changes. The GARCH model is widely used for this purpose. However, it cannot capture the asymmetric nature of volatility. This study proposes the Modified Asymmetrical GARCH (MAGARCH) model. It accommodates heteroskedasticity and captures asymmetry through an indicator function. The aim of this research is to evaluate the ability of MAGARCH to predict the risk of returns for two stocks, ISAT and TLKM. The study also examines the role of inter-asset dependence in determining financial risk measures. To achieve this, the asymmetric GARCH model is integrated with a Copula approach. This allows the dependence structure between assets to be depicted more accurately. The results show that applying Copula to the asymmetric GARCH model, including MAGARCH, improves the accuracy of risk measure estimates. This improvement is most evident in Value-at-Risk. The findings highlight the importance of using flexible volatility models and nonlinear dependence approaches in measuring and forecasting portfolio risk. Therefore, the proposed model can serve as an effective strategy for supporting financial risk management decisions.

Keywords: Asymmetric volatility, Copula, GARCH, modified model, two assets.

Abstrak

Pemodelan volatilitas penting dalam manajemen risiko kuantitatif karena mencerminkan dinamika perubahan return. Model GARCH banyak digunakan untuk tujuan ini. Namun model tersebut tidak mampu menangkap sifat asimetris volatilitas. Penelitian ini mengusulkan Modified Asymmetrical GARCH (MAGARCH). Model ini dapat mengakomodasi heteroskedastis sekaligus menangkap asimetri melalui fungsi indikator. Tujuan penelitian adalah mengevaluasi kemampuan MAGARCH dalam memprediksi risiko return saham dua aset, ISAT dan TLKM. Penelitian ini juga menelaah peran ketergantungan antar-aset dalam menentukan ukuran risiko keuangan. Untuk itu, model GARCH asimetris diintegrasikan dengan pendekatan Copula. Dengan cara ini, struktur ketergantungan antar-aset dapat digambarkan lebih akurat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penerapan Copula pada model GARCH asimetris termasuk MAGARCH meningkatkan akurasi estimasi ukuran risiko. Peningkatan ini paling nyata terlihat pada Value-at-Risk. Temuan ini menegaskan pentingnya penggunaan model volatilitas fleksibel dan pendekatan dependensi nonlinier dalam pengukuran serta prediksi risiko portofolio. Dengan

demikian, model yang diusulkan dapat menjadi strategi efektif untuk mendukung pengambilan keputusan manajemen risiko keuangan.

Kata kunci: Copula, dua aset, GARCH, model modifikasi, volatilitas asimetris.

I. Pendahuluan

Pengukuran risiko merupakan aspek fundamental dalam keuangan modern karena berfungsi mengantisipasi potensi kerugian tak terduga akibat fluktuasi nilai aset. Salah satu ukuran risiko yang paling sederhana adalah volatilitas, yaitu besarnya perubahan return dalam periode tertentu [1][2]. Ukuran lain yang banyak digunakan adalah *Value-at-Risk* (VaR), yang mendefinisikan kerugian maksimum yang dapat ditoleransi pada tingkat kepercayaan tertentu [3][4]. Namun, VaR tidak memenuhi sifat sub-aditif sehingga dapat menimbulkan masalah dalam diversifikasi portofolio [5]. Untuk itu, dikembangkan ukuran risiko alternatif seperti *Expected Shortfall* (ES) yang mampu mengatasi keterbatasan VaR dengan memperhitungkan nilai rata-rata kerugian di luar VaR. Selain ukuran risiko, pemilihan distribusi return juga berpengaruh signifikan terhadap hasil prediksi [6]. Asumsi distribusi simetris sering kali menghasilkan estimasi risiko yang terlalu rendah [7]. Oleh karena itu, distribusi asimetris dianggap lebih sesuai dalam memodelkan data keuangan yang cenderung *skewed* dan *heavy-tailed* [8]. Sifat asimetris ini penting untuk menangkap karakteristik empiris return dan volatilitas [9].

Pemodelan volatilitas memiliki peran sentral dalam manajemen risiko kuantitatif [10]. Volatilitas yang bersifat *time-varying* [11] mencerminkan dinamika pergerakan return yang dapat berubah seiring waktu. Selanjutnya, [12] dan [13] memperkenalkan model ARCH dan GARCH untuk menangkap sifat heteroskedastisitas pada data keuangan. Meski demikian, GARCH standar hanya menghasilkan respon simetris, yaitu perubahan volatilitas yang sama baik akibat return positif maupun negatif. Hal ini tidak sesuai dengan fenomena empiris bahwa volatilitas pasar meningkat lebih tajam akibat berita buruk dibanding berita baik [14][15].

Untuk menutupi keterbatasan tersebut, berbagai pengembangan model GARCH asimetris telah diusulkan, seperti GJR-GARCH [16], TGARCH [17], VSGARCH [18], dan ATGARCH [19]. Model-model ini menambahkan fungsi indikator biner yang membedakan dampak return positif dan negatif terhadap volatilitas. Sejalan dengan arah pengembangan tersebut, penelitian ini mengusulkan modifikasi berupa *Modified Asymmetrical GARCH* (MAGARCH), yaitu model GARCH dengan penambahan fungsi indikator dan parameter tambahan untuk menangkap sifat asimetris secara lebih fleksibel.

Lebih lanjut, penelitian ini berfokus pada dua aset, yang analisis risikonya lebih kompleks dibanding satu aset karena melibatkan ketergantungan antar-return. Dalam konteks ini, pendekatan tradisional berbasis korelasi linier sering kali tidak memadai. Salah satu metode yang lebih tepat adalah *Copula*, yaitu fungsi distribusi gabungan dengan distribusi marginal uniform [0,1]. Dengan demikian, penelitian ini berupaya mengisi kesenjangan literatur melalui pengembangan model MAGARCH berbasis Copula untuk memprediksi ukuran risiko keuangan. Pendekatan ini diharapkan dapat memberikan hasil yang lebih realistis dalam pengukuran risiko, khususnya ketika sifat asimetris dan ketergantungan antar-aset menjadi faktor yang dominan.

II. Metode Penelitian

2.1 Model GARCH Asimetris yang Dimodifikasi

Model *Modified Asymmetrical GARCH* (MAGARCH) merupakan modifikasi dari model GARCH dengan penambahan fungsi indikator serta beberapa parameter pada model.

Misalkan $\{R_t, t \geq 0\}$ merepresentasikan proses stokastik dari return suatu aset pada waktu t . Maka $\{R_t, t \geq 0\}$ mengikuti model MAGARCH(1,1) jika

$$R_t = \sqrt{\sigma_t^2} \varepsilon_t \quad (1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} I_{R_{t-1} < r} + (\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} I_{R_{t-1} < r}) R_{t-1}^2 + (\beta^{(1)} + \beta^{(2)} I_{R_{t-1} < r}) \sigma_{t-1}^2$$

dengan $I_{R_{t-1} < r}$ adalah fungsi indikator yang bernilai 1 jika $I_{R_{t-1} < r} < \tau$, dan 0 jika sebaliknya. Agar varians bersyarat σ_t^2 selalu positif, maka diperlukan kondisi berikut untuk setiap *regime* yaitu regime 0 ($I_{R_{t-1} < r} = 0$), $\alpha^{(1)} > 0, \gamma^{(1)} \geq 0, \beta^{(1)} \geq 0$, dan regime 1 ($I_{R_{t-1} < r} = 1$) yaitu $\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} > 0, \gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} \geq 0, \beta^{(1)} + \beta^{(2)} \geq 0$.

Selanjutnya, untuk menjamin keberadaan momen kedua yang terbatas (*stasioneritas lemah*), diperlukan syarat yaitu $\gamma^{(1)} + \beta^{(1)} < 1, (\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)}) + (\beta^{(1)} + \beta^{(2)}) < 1$. Kondisi ini memastikan bahwa baik intersep maupun koefisien bersifat non-negatif pada kedua *regime*, serta menjamin varians bersyarat selalu positif dan proses yang terbentuk tetap stasioner. Model MAGARCH(1,1) juga melibatkan variabel acak indikator $I_{R_{t-1} < r}$. Untuk kepentingan analisis momen yang lebih tinggi, probabilitas indikator ini didefinisikan sebagai

$$P(I_{R_{t-1} < r} = j) = \omega_j, j = 0, 1. \quad (2)$$

dengan ω_j menyatakan peluang bahwa return pada periode sebelumnya berada pada *regime* ke- j . Nilai ω_0 dan ω_1 memenuhi $\omega_0 + \omega_1 = 1$.

Selain struktur di atas, model MAGARCH(1,1) juga memiliki komponen ambang (*threshold*). Salah satu metode untuk menentukan nilai ambang adalah dengan memanfaatkan *Mean Excess Function* (MEF). Fungsi ini digunakan untuk menentukan ambang data ketika terdapat beberapa nilai observasi yang relatif jauh lebih besar daripada yang lain. Misalkan R_t adalah variabel acak dengan ambang r , maka fungsi kelebihanannya didefinisikan sebagai:

$$(R_t - r)^+ = \begin{cases} R_t - r, & R_t \geq r \\ 0, & R_t < r \end{cases}$$

Sehingga MEF dapat dituliskan:

$$e(r) = E(R_t - r \mid R_t > r) = \frac{\sum_{t=1}^n (R_t - r)^+}{N_r},$$

dengan N_r adalah jumlah observasi yang lebih besar dari ambang r .

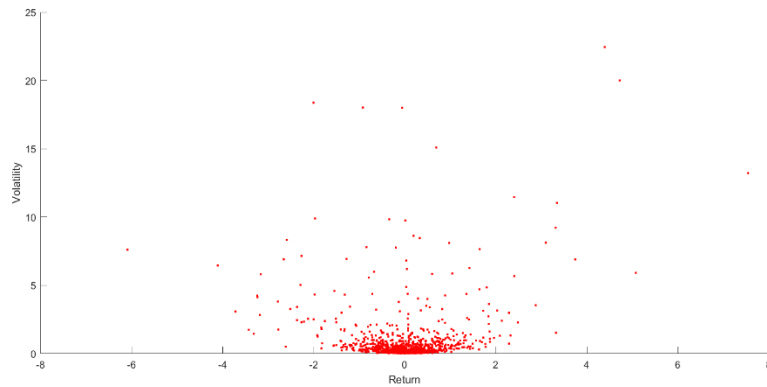
Selanjutnya menurut [20], return dan volatilitas memiliki karakteristik khusus yang sering disebut sebagai sifat empiris. Karakteristik tersebut diperoleh dari kemampuan model dalam menangkap sebanyak mungkin sifat volatilitas, seperti kurtosis, fungsi autokorelasi, dan asimetri volatilitas. Model volatilitas yang baik adalah model yang mampu mengakomodasi sifat-sifat empiris tersebut. Kualitas model akan memengaruhi akurasi prediksi risiko yang dihasilkan. Dengan demikian, MAGARCH(1,1) dirancang untuk memenuhi sifat-sifat empiris tersebut sekaligus memberikan kerangka yang fleksibel dalam mengukur risiko. Pada penelitian ini akan dibahas mengenai sifat asimetris.

Sifat asimetris pada dasarnya merujuk pada kondisi ketika nilai return positif dan negatif memiliki pengaruh yang berbeda terhadap volatilitas. Dalam literatur, [21] mengklasifikasikan sifat asimetris ini ke dalam tiga tipe: (i) tipe 1 (*Leverage effect*), terdapat korelasi negatif antara return saat ini dengan volatilitas masa depan. (ii) tipe 2, return negatif memberikan pengaruh yang lebih besar terhadap volatilitas dibanding return positif. (iii) tipe 3: return positif memberikan pengaruh yang lebih besar terhadap volatilitas

dibanding return negatif. Dengan kata lain, sifat asimetris menunjukkan bahwa arah return pada periode sebelumnya (baik positif maupun negatif) dapat menimbulkan besaran volatilitas yang berbeda di periode berikutnya. Untuk menilai apakah model MAGARCH(1,1) mampu mengakomodasi sifat asimetris, dapat digunakan korelasi antara return ε_t dan volatilitas bersyarat σ_t^2 . Bentuk korelasi tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{Corr}(\sigma_t^2, \varepsilon_{t-1}) = \frac{\text{Cov}(\sigma_t^2, \varepsilon_{t-1})}{\sqrt{\text{Var}(\sigma_t^2)\text{Var}(\varepsilon_{t-1})}} = \frac{E(\sigma_t^2 \varepsilon_{t-1}) - E(\sigma_t^2)E(\varepsilon_{t-1})}{\sqrt{\text{Var}(\sigma_t^2)\text{Var}(\varepsilon_{t-1})}} \quad (5)$$

Berdasarkan sifat distribusi, diperoleh bahwa $E(\varepsilon_{t-1}) = 0$ dan $E(\varepsilon_{t-1}\sigma_t^2) = 0$. Dengan demikian, nilai korelasi $\text{corr}(\sigma_t^2, \varepsilon_{t-1})$ adalah nol. Hal ini berarti bahwa dalam model MAGARCH(1,1), baik return positif maupun return negatif akan memberikan kontribusi yang sama terhadap volatilitas, sehingga model ini tidak dapat secara langsung menangkap sifat asimetris return. Namun, melalui pengujian numerik dengan data empiris, diperoleh nilai korelasi antara return dan volatilitas sebesar 0,1185. Nilai ini menunjukkan adanya hubungan positif antara return dan volatilitas. Akan tetapi, karena nilai probabilitas uji lebih besar dari 0,05, hubungan tersebut tidak signifikan secara statistik. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa model MAGARCH(1,1) tidak dapat sepenuhnya mengakomodasi sifat asimetris, khususnya keterkaitan antara arah return dan volatilitas.



Gambar 1. Korelasi antara Return dan Volatilitas

2.2 Agregasi Dua Aset dan Pengukuran Risiko dengan Model MAGARCH(1,1)

Misalkan variabel acak X dan Y masing-masing merepresentasikan return dari aset 1 dan aset 2. Proporsi investasi pada aset 1 dinyatakan dengan a , sedangkan pada aset 2 dengan $(1 - a)$. Dengan demikian, return agregat dari portofolio dua aset tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$R_t^+ = aX + (1 - a)Y \quad (6)$$

dengan $E(X) = \mu_X, \text{Var}(X) = \sigma_X^2, E(Y) = \mu_Y, \text{Var}(Y) = \sigma_Y^2, \text{Corr}(X, Y) = \rho_{XY}$. Nilai harapan (rerata) dari return agregat portofolio ini adalah:

$$\mu_{R_t^+} = E(aX + (1 - a)Y) = a\mu_X + (1 - a)\mu_Y \quad (7)$$

Sedangkan variansinya dapat dituliskan sebagai:

$$\sigma_{R_t^+}^2 = \text{Var}(aX + (1 - a)Y) = a^2\sigma_X^2 + (1 - a)^2\sigma_Y^2 + 2a(1 - a)\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \quad (8)$$

Berdasarkan Persamaan (7) dan (8), terlihat bahwa rata-rata $\mu_{R_t^+}$ dan variansi $\sigma_{R_t^+}^2$ sangat dipengaruhi oleh nilai proporsi aserta korelasi ρ_{XY} . Dengan demikian, penentuan bobot portofolio tidak hanya ditentukan oleh besarnya return yang diharapkan, tetapi juga oleh risiko agregat yang ditimbulkan. Risiko ini diukur menggunakan standar deviasi $\sigma_{R_t^+}$, di mana semakin besar nilai standar deviasi, semakin besar pula tingkat ketidakpastian (volatilitas) portofolio. Dalam praktiknya, pembentukan portofolio memerlukan pendekatan distribusi bersama (*joint distribution function*) dari return aset-aset yang digabungkan. Hal ini penting untuk memperoleh ukuran risiko yang lebih akurat. Penentuan distribusi bersama yang tepat harus mempertimbangkan fungsi distribusi marginal dari masing-masing aset serta struktur ketergantungan antar variabel acak.

Jika X dan Y merupakan variabel acak kontinu, maka fungsi distribusi bersama dapat dituliskan sebagai:

$$H_{XY}(x, y) = P(X \geq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y h_{XY}(x, y) dy dx \quad (9)$$

dengan $h_{XY}(x, y)$ merupakan fungsi densitas probabilitas bivariat dari X dan Y . Dalam konteks agregasi return, distribusi bersama ini memungkinkan kita untuk membentuk distribusi portofolio secara lebih komprehensif, dengan tetap memperhatikan sifat distribusi masing-masing aset serta keterkaitannya. Dengan demikian, analisis risiko portofolio menjadi lebih akurat dibandingkan jika hanya mengandalkan distribusi marginal secara terpisah.

$$P(R_t^+ \leq r_t^+) = P(aX + (1-a)Y \leq r_t^+) = \int_{-\infty}^{\frac{r_t^+ - (1-a)y}{a}} \int_{-\infty}^y h_{XY}(x, y) dy dx \quad (10)$$

Misalkan R_t adalah suatu proses stokastik yang menyatakan return dari aset 1 dan 2. Maka, R_t mengikuti suatu distribusi tertentu dengan parameter vektor θ . Untuk memprediksi return pada waktu $t+1$ dengan tingkat keyakinan $(1-\alpha)$, persamaan probabilitasnya adalah:

$$P(R_{t+1} \leq VaR_{t+1}(R_t | \mu_t, \sigma_t)) = 1 - \alpha \quad (11)$$

Sehingga, nilai Value at Risk (VaR) pada tingkat keyakinan $(1-\alpha)$ dapat dituliskan sebagai

$$VaR_{t+1}^{1-\alpha}(R_t) = \mu_t + \Phi^{-1}(1-\alpha) \hat{\sigma}_{t+1} \quad (12)$$

dengan $\Phi^{-1}(1-\alpha)$ menyatakan kuantil distribusi normal standar. Apabila residual u_t berdistribusi normal, maka prediksi VaR pada saat $t+1$ dengan tingkat keyakinan $(1-\alpha)$ menggunakan model MAGARCH(1,1) dapat dinyatakan sebagai:

$$VaR_{t+1}^{1-\alpha}(R_t) = \hat{\mu} + \hat{\Phi}(1-\alpha) \hat{\sigma}_{t+1} \quad (13)$$

dengan $\hat{\mu}$ adalah rata-rata return, $\hat{\sigma}_{t+1}$ adalah volatilitas bersyarat, dan $\hat{\Phi}(1-\alpha)$ adalah kuantil distribusi normal standar. Selain VaR, terdapat pula ukuran risiko lain yaitu *Expected Shortfall* (ES). ES didefinisikan sebagai nilai ekspektasi dari return pada saat kerugian melampaui nilai VaR. Dengan kata lain, ES memberikan informasi mengenai besarnya kerugian rata-rata yang terjadi pada kondisi *tail risk*. Secara matematis, ES dapat dituliskan sebagai:

$$ES_{t+1}^{1-\alpha}(R_t) = E[-R_{t+1} | R_{t+1} \leq VaR_{t+1}^{1-\alpha}(R_t)] = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{VaR_{t+1}^{1-\alpha}} xf(x) dx \quad (14)$$

Prediksi ES untuk distribusi normal dengan $\phi(\cdot)$ adalah fungsi densitas distribusi normal standar [22] dapat dinyatakan sebagai:

$$ES_{t+1}^{1-\alpha} = \hat{\mu} + \hat{\sigma} \frac{\phi(\Phi^{-1}(1-\alpha))}{\alpha} \quad (15)$$

Dalam banyak kasus, asumsi normal tidak realistis karena data return keuangan sering menunjukkan *fat tails*. Oleh karena itu, distribusi Student- t sering digunakan. Jika residual mengikuti distribusi t dengan derajat kebebasan ν , maka VaR pada tingkat keyakinan $(1-\alpha)$ dapat ditulis sebagai:

$$VaR_{t+1}^{1-\alpha}(R_t) = \mu_t + t_{\nu}^{-1}(1-\alpha) \hat{\sigma}_{t+1} \quad (16)$$

dengan $t_{\nu}^{-1}(1-\alpha)$ adalah kuantil distribusi Student- t dengan ν derajat kebebasan. Selanjutnya, Expected Shortfall (ES) untuk distribusi Student- t dengan $f_{t_{\nu}}(\cdot)$ adalah fungsi kepadatan distribusi Student- t dapat dinyatakan sebagai [22]:

$$ES_{t+1}^{1-\alpha}(R_t) = \mu_t + \hat{\sigma}_{t+1} \cdot \frac{f_{t_{\nu}}(t_{\nu}^{-1}(1-\alpha))}{\alpha} \cdot \frac{\nu + (t_{\nu}^{-1}(1-\alpha))^2}{\nu - 1} \quad (17)$$

2.3 Copula

Copula merupakan suatu distribusi bivariat dengan marginal Uniform $[0,1]$, yang berfungsi untuk menghubungkan dua fungsi distribusi dari variabel acak. Misalkan X dan Y adalah variabel acak kontinu dengan fungsi distribusi F_X dan F_Y . Maka, sebuah fungsi distribusi dengan marginal Uniform $[0,1]$ yang menghubungkan X dan Y disebut sebagai copula dari X dan Y apabila:

$$H_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad (18)$$

Sebagai sebuah fungsi distribusi bivariat, copula memiliki sifat-sifat bawaan dari fungsi distribusi bivariat, seperti *2-increasing* dan *grounded*. Misalkan U dan V adalah dua variabel acak dengan sebuah copula C . Variabel acak U dan V juga memiliki fungsi probabilitas bivariat yang dikenal sebagai fungsi kerapatan copula (*copula density function*), yang didefinisikan sebagai:

$$c(u, v) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u \partial v} \quad (19)$$

Apabila copula C diketahui, serta fungsi invers F_X^{-1} dan F_Y^{-1} ada, maka fungsi distribusi bivariat H_{XY} dapat dinyatakan sebagai:

$$C(u, v) = F_{XY}(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v)) \quad (20)$$

Sementara itu, fungsi densitas probabilitas bersama (*joint probability density function*) dari distribusi bivariat H_{XY} adalah sebagai berikut:

$$f_{XY} = c(u, v) f_X(x) f_Y(y) \quad (21)$$

Dengan demikian, copula menghubungkan distribusi marginal F_X dan F_Y dengan distribusi bersama H_{XY} melalui fungsi kerapatan $c(u, v)$. Lebih lanjut, copula dapat dikategorikan ke dalam beberapa jenis, termasuk copula fundamental, copula implisit, dan copula eksplisit. Studi ini meneliti copula implisit, terutama copula t dan copula Clayton. Copula t dipilih karena mampu menangkap ketergantungan ekor tebal, baik positif maupun negatif, yang umum terjadi pada return saham. Copula Clayton dipilih karena mampu memodelkan ketergantungan pada bagian bawah distribusi, sehingga cocok untuk menggambarkan risiko ekstrem saat kerugian. Dengan menggunakan kedua copula ini, struktur ketergantungan

non-linear antar aset dapat dimodelkan secara lebih komprehensif dibandingkan copula sederhana atau normal.

2.3.1 Copula t

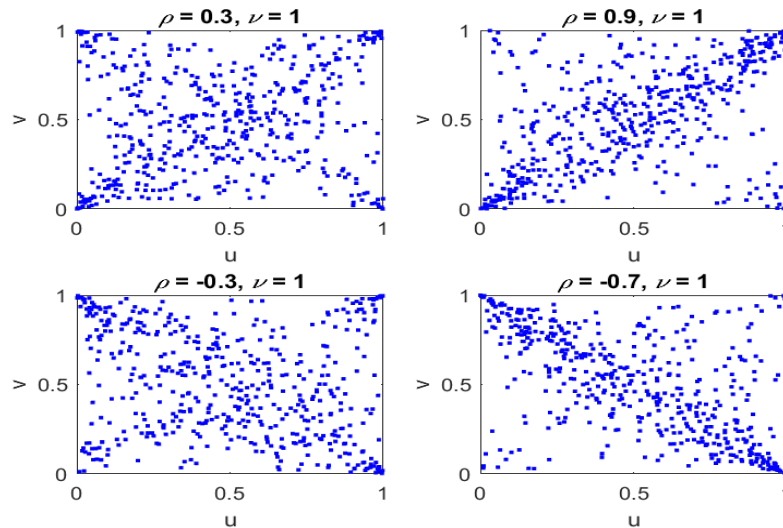
Copula t dibentuk berdasarkan distribusi bivariat t standar dengan derajat kebebasan ν dan koefisien korelasi ρ . Copula t dapat didefinisikan sebagai

$$C_t(u, v; \rho, \nu) = t_{\nu, \rho}(t_{\nu}^{-1}(u), t_{\nu}^{-1}(v)) \\ = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} ds dt \quad (22)$$

dengan $t_{\nu}^{-1}(u)$ adalah invers dari fungsi distribusi t standar dengan derajat kebebasan ν , dan $\rho \in [-1, 1]$. Copula t dapat mengakomodasi ketergantungan positif maupun negatif. Perbedaan utama copula t dengan copula normal terletak pada ketebalan ekor (*tail thickness*). Faktor yang memengaruhi ketebalan ekor adalah nilai ν . Semakin kecil nilai ν , semakin tebal ekor distribusi tersebut. Sebaliknya, jika nilai ν mendekati tak hingga, maka copula t dapat dimodelkan mendekati copula normal. Sementara itu, densitas copula t diberikan oleh:

$$c_t(u, v; \rho, \nu) = \frac{\nu}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\nu\pi}}\right)^2 \left(1 + \frac{s^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \left(1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} \quad (23)$$

dengan $s = t_{\nu}^{-1}(u)$ dan $t = t_{\nu}^{-1}(v)$. Bagian ini menunjukkan bagaimana copula t mampu menangkap ketergantungan dengan ekor tebal (*fat tails*) yang sering muncul pada data keuangan. Visualisasi densitas copula t biasanya dilakukan untuk berbagai nilai ρ dan ν , sehingga terlihat perbedaan struktur dependensi pada ekor distribusi.



Gambar 2. Fungsi Densitas Copula-t

2.3.2 Copula Clayton

Copula Clayton adalah copula yang hanya mampu memodelkan ketergantungan positif antara dua peubah acak. Copula Clayton dicirikan oleh adanya ketergantungan yang kuat pada nilai kecil (bagian bawah distribusi), tetapi lemah dalam memodelkan ketergantungan pada nilai besar. Selain itu, copula Clayton memiliki fungsi generator

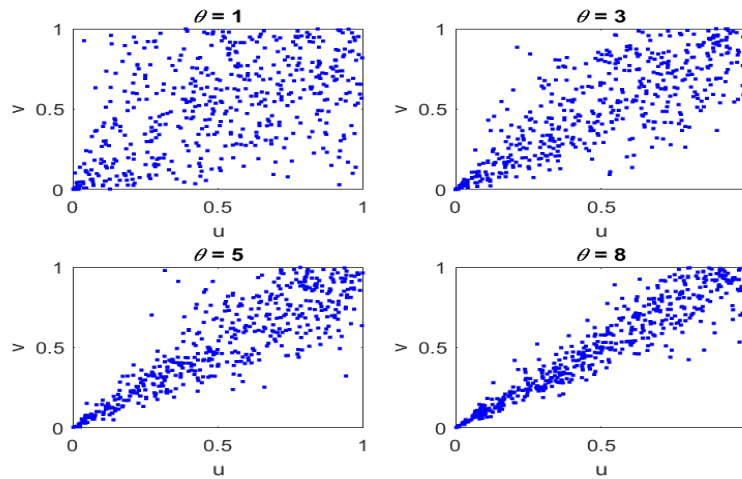
$\phi(t)$ yang memenuhi syarat $\phi(1) = 0$ dan $\phi(t)$ merupakan fungsi monoton menurun yang didefinisikan untuk setiap $t \in (0,1]$. Copula Clayton didefinisikan sebagai:

$$C(u, v; \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (24)$$

Sedangkan fungsi densitas dari copula Clayton dapat dituliskan sebagai:

$$c(u, v; \theta) = (\theta + 1)(uv)^{-(\theta+1)}(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{2\theta+1}{\theta}} \quad (25)$$

Berikutnya biasanya ditampilkan plot dari densitas copula Clayton untuk berbagai nilai parameter θ .



Gambar 3. Fungsi Densitas Copula Clayton

2.4 Estimasi Parameter Model

Dalam memprediksi perubahan volatilitas di masa depan menggunakan model, diperlukan nilai parameter yang akurat. Pada penelitian ini, parameter MAGARCH(1,1) diestimasi menggunakan metode *Quasi Maximum Likelihood* (QML) dengan algoritma BHHH (Berndt-Hall-Hall-Hausman). Metode QML dipilih karena bersifat robust terhadap pelanggaran asumsi normalitas residual. Prosedur estimasi dilakukan dengan langkah-langkah berikut. Pertama, ditentukan fungsi likelihood dari model MAGARCH(1,1) berdasarkan data return. Kedua, likelihood dimaksimalkan menggunakan algoritma BHHH untuk memperoleh estimasi parameter model. Estimasi dilakukan untuk setiap regime karena model MAGARCH memiliki dua regime yang ditentukan oleh fungsi indikator. Nilai parameter yang diperoleh kemudian digunakan dalam prediksi volatilitas dan perhitungan risiko keuangan.

2.4 Evaluasi Model

Prediksi VaR dievaluasi melalui backtesting formal menggunakan proporsi Correct VaR. Correct VaR membandingkan jumlah kejadian kerugian yang lebih kecil dari VaR dengan total jumlah data yang diamati. Misalkan I_{t+1} adalah variabel acak biner yang mengikuti distribusi Bernoulli dengan probabilitas keberhasilan $P(r_{t+1} \geq VaR_{t+1}^{1-\alpha}(R_t))$. Ketepatan VaR dapat dinyatakan sebagai:

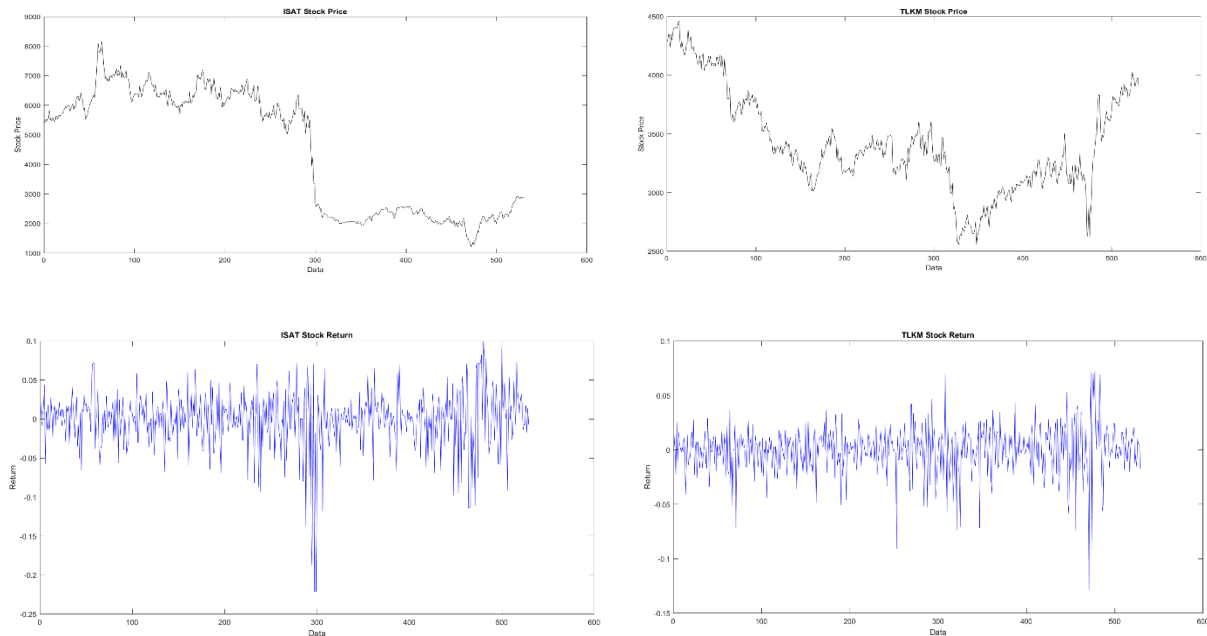
$$\text{Correct VaR} = \frac{\sum_{i=1}^N I_{t+1}}{N} \approx 1 - \alpha \quad (26)$$

Selain itu, evaluasi dapat dilakukan dengan backtesting out-of-sample, membandingkan VaR yang diprediksi dengan kerugian aktual yang terjadi. Evaluasi ini memastikan bahwa model MAGARCH, termasuk integrasi dengan Copula, tidak hanya sesuai dengan data historis tetapi juga memberikan estimasi risiko yang akurat dalam kondisi pasar nyata. Selain VaR, ukuran risiko tambahan seperti *Expected Shortfall* (ES) dapat digunakan untuk mengukur potensi kerugian pada ekor distribusi, sehingga prediksi risiko portofolio menjadi lebih komprehensif.

III. Hasil dan Pembahasan

3.1 Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data return dari harga saham ISAT dan TLKM (sumber: www.yahoofinance.com) untuk periode 2 Maret 2020 hingga 2 Maret 2022. Return didefinisikan sebagai $R_{i,t} = \ln(P_{i,t}/P_{i,t-1})$ dengan $P_{i,t}$ menyatakan harga saham ke- i pada waktu t , dan $i = 1, 2$. Gambar berikut menyajikan pergerakan harga saham ISAT dan TLKM beserta data return-nya.



Gambar 4. Harga dan Return ISAT serta TLKM

Tabel 1. Statistik Deskriptif

No	Statistik	Saham	
		ISAT	TLKM
1	Jumlah Data	531	531
2	Rerata	-0,0012	0,0002
3	Variansi	0,0015	0,0005
4	Skewnes	-0,3053	-0,8155
5	Kurtosis	9,0702	6,8853

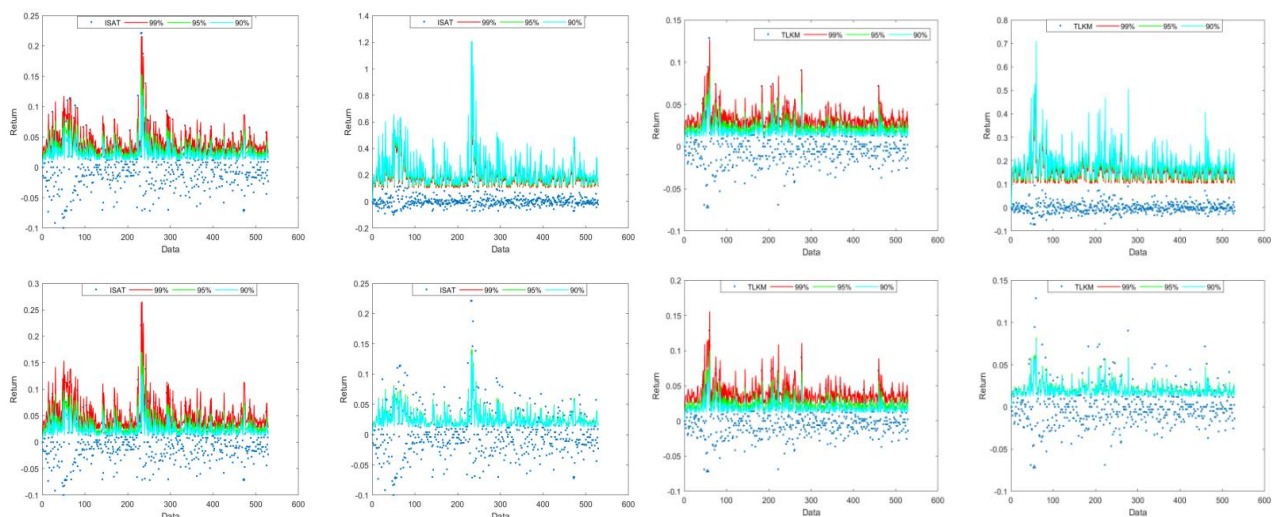
Berdasarkan Gambar 5 terlihat bahwa grafik return memiliki rentang yang lebih kecil dibandingkan dengan grafik harga. Hal ini menyebabkan return lebih mudah diprediksi di masa mendatang dan cenderung lebih stasioner. Karakteristik tersebut dapat diamati dari plot nilai rata-rata dan varians yang relatif konstan sepanjang waktu. Oleh karena itu, data runtun waktu yang digunakan dalam penelitian ini adalah return dari harga saham. Selanjutnya, data return $R_{i,t}$ pada awalnya diasumsikan mengikuti distribusi normal. Namun, asumsi ini tidak sepenuhnya tepat karena nilai kurtosis $R_{i,t}$ melebihi kurtosis distribusi normal. Kondisi tersebut menunjukkan bahwa distribusi $R_{i,t}$ memiliki ekor yang lebih tebal (*thick tail*), sehingga probabilitas munculnya nilai ekstrem cukup tinggi. Hasil analisis statistik deskriptif memperlihatkan bahwa nilai kurtosis komponen agregasi lebih besar dari tiga, yang mengindikasikan bahwa data pembentuk komponen agregasi mengikuti distribusi dengan ekor tebal.

3.2 Prediksi Pengukuran Risiko Berbasis Copula

Prediksi *Value at Risk* (VaR) dan *Expected Shortfall* (ES) dari return kedua saham ditentukan dengan menggunakan model MAGARCH (normal) dan MAGARCH (t). Prediksi VaR dan ES pada tingkat keyakinan $\alpha = 99\%$, $\alpha = 95\%$, dan $\alpha = 90\%$ ditampilkan pada tabel berikut.

Tabel 2. Prediksi VaR Saham ISAT dan TLKM

No	Saham	Persentase	Distribusi Normal		Distribusi t	
			VaR^N	ES^N	VaR^t	ES^t
1	ISAT	99%	0.0311	0.0356	0.0370	0.0196
		95%	0.0220	0.0275	0.0237	0.0196
		90%	0.0171	0.0234	0.0178	0.0185
2	TLKM	99%	0.0255	0.0293	0.0299	0.0158
		95%	0.0181	0.0226	0.0192	0.0159
		90%	0.0141	0.0193	0.0144	0.0150



Gambar 6. Prediksi VaR Saham ISAT dan TLKM

Berdasarkan Tabel 2 dan Gambar 6 dapat dilihat bahwa nilai prediksi VaR^t memiliki nilai yang lebih tinggi dibandingkan dengan VaR^N , sedangkan nilai prediksi ES^N lebih tinggi dibandingkan dengan ES^t . Hal ini menunjukkan bahwa nilai risiko yang dihasilkan dari data agregasi yang berdistribusi-t tidak selalu lebih besar dibandingkan dengan distribusi normal. Selanjutnya, tingkat akurasi dalam memprediksi nilai risiko dapat diketahui melalui proporsi kebenaran VaR (*correct VaR proportion*). Metode ini menilai akurasi VaR dengan cara melihat proporsi kerugian yang lebih kecil atau sama dengan nilai prediksi VaR. Proporsi kebenaran VaR untuk kedua saham tersebut ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 3. Correct VaR dan ES

No	Saham	Persentase	Distribusi Normal		Distribusi t	
			Correct VaR^N	Correct ES^N	Correct VaR^t	Correct ES^t
1	ISAT	99%	88.0907	99.6219	90.7373	79.3951
		95%	81.6635	99.8110	82.4197	79.3951
		90%	77.5047	99.8110	77.6938	78.2609
2	TLKM	99%	92.8166	99.8903	94.8960	84.8771
		95%	87.1456	99.8903	88.0907	84.8771
		90%	83.1758	99.8903	83.7429	84.3100

Apabila perbedaan antara VaR dan ES yang benar (*correct VaR dan ES*) berada pada tingkat signifikansi yang paling kecil, maka model tersebut dapat dikatakan memiliki kinerja yang baik dalam memprediksi nilai di masa depan. Pada Tabel 3, perbedaan terkecil antara nilai *correct VaR* dan *ES* dengan tingkat probabilitas yang diberikan untuk kedua saham terdapat pada ES^N . Hal ini menunjukkan bahwa model MAGARCH(normal) merupakan model yang paling sesuai untuk memodelkan saham ISAT dan TLKM, karena perbedaan antara VaR dan ES yang benar pada tingkat signifikansi tersebut adalah yang paling kecil.

Selanjutnya, VaR dan ES akan diprediksi dengan menggunakan konsep rata-rata, yakni dengan menghasilkan data berdasarkan hasil estimasi parameter dari keluarga copula, khususnya copula t dan copula Clayton. Tabel berikut menampilkan hasil prediksi VaR dan ES untuk data agregasi. Dapat dilihat bahwa nilai prediksi VaR^N 90% untuk copula t dan copula Clayton pada saham ISAT dan TLKM memiliki nilai terkecil. Sementara itu, untuk $ES_{90\%}^N$ pada saham TLKM, copula t dan copula Clayton juga menunjukkan nilai yang terkecil.

Tabel 4. Prediksi Risiko dengan Pendekatan Copula

No	Saham	Copula t			Copula Clayton		
		$VaR_{99\%}^N$	$VaR_{95\%}^N$	$VaR_{90\%}^N$	$VaR_{99\%}^N$	$VaR_{95\%}^N$	$VaR_{90\%}^N$
1	ISAT	0.0802	0.1656	0.9280	0.7604	0.1969	1.1221
		$ES_{99\%}^N$	$ES_{95\%}^N$	$ES_{90\%}^N$	$ES_{99\%}^N$	$ES_{95\%}^N$	$ES_{90\%}^N$
		0.7604	1.4315	5.9354	0.8956	1.6852	6.9535
2	TLKM	$VaR_{99\%}^N$	$VaR_{95\%}^N$	$VaR_{90\%}^N$	$VaR_{99\%}^N$	$VaR_{95\%}^N$	$VaR_{90\%}^N$
		0.0300	0.0421	0.0779	0.0309	0.0440	0.0845
		$ES_{99\%}^N$	$ES_{95\%}^N$	$ES_{90\%}^N$	$ES_{99\%}^N$	$ES_{95\%}^N$	$ES_{90\%}^N$
		0.0506	0.0664	0.1153	0.0538	0.0715	0.1267

3.3 Pembahasan

Analisis deskriptif menunjukkan bahwa return saham ISAT dan TLKM memiliki distribusi dengan ekor tebal, ditunjukkan oleh nilai kurtosis yang lebih besar dari tiga. Hal ini mengindikasikan adanya peluang munculnya nilai ekstrem sehingga asumsi distribusi normal kurang sepenuhnya tepat. Selain itu, ketergantungan antar harga, return, dan kuadrat return juga relatif kuat, dengan nilai ρ masing-masing sebesar 0.4684; 0.4345; dan 0.2081. Harga saham menunjukkan korelasi tertinggi, sedangkan return memiliki ketergantungan yang lebih lemah. Temuan ini menegaskan pentingnya pemodelan risiko yang memperhatikan dinamika volatilitas serta struktur ketergantungan.

Hasil estimasi menunjukkan bahwa model MAGARCH(normal) lebih unggul dibandingkan distribusi-t karena menghasilkan selisih terkecil antara VaR dan ES pada berbagai tingkat signifikansi. Meskipun secara teoretis MAGARCH tidak sepenuhnya asimetris, model ini dipilih karena mampu mengakomodasi heteroskedastisitas dan sebagian sifat asimetris return melalui fungsi indikator. Integrasi pendekatan copula, khususnya copula t dan copula Clayton, terbukti efektif dalam menangkap ketergantungan non-linear antar return saham. Prediksi VaR dan ES berbasis copula memberikan nilai risiko yang lebih realistis, terutama pada tingkat keyakinan 90%. Meskipun demikian, analisis sensitivitas terhadap variasi parameter model belum dilakukan dan dapat menjadi langkah penting untuk menilai robustitas prediksi risiko. Secara teori, pendekatan MAGARCH dan copula dapat diperluas untuk portofolio multi-aset, meskipun hal ini membutuhkan estimasi parameter yang lebih kompleks dan pemilihan copula multivariat. Selain itu, penggunaan copula dinamis yang memungkinkan parameter ketergantungan berubah seiring waktu dapat menjadi pengembangan lanjutan agar model lebih responsif terhadap perubahan pasar. Dengan demikian, kombinasi model MAGARCH(normal) dan copula tetap menjadi pendekatan yang akurat dan komprehensif dalam mengukur risiko portofolio saham ISAT dan TLKM, sambil membuka peluang pengembangan untuk analisis portofolio yang lebih luas dan adaptif.

Kelebihan penelitian ini terletak pada penggunaan gabungan model GARCH multivariat dan copula yang mampu mengakomodasi volatilitas dan struktur ketergantungan secara lebih detail. Namun, keterbatasannya adalah fokus yang hanya pada dua saham dan rentang data tertentu, sehingga generalisasi hasil perlu dilakukan dengan hati-hati. Pengembangan lebih lanjut dapat diarahkan pada penerapan model serupa pada portofolio yang lebih luas, periode data yang lebih panjang, serta eksplorasi copula lain untuk menguji konsistensi hasil.

IV. Kesimpulan

Penelitian ini menunjukkan bahwa model MAGARCH(1,1) dengan asumsi distribusi normal memberikan prediksi risiko return saham ISAT dan TLKM yang lebih akurat dibandingkan distribusi-t. Keakuratan ini ditunjukkan oleh perbedaan terkecil antara nilai prediksi dan nilai correct VaR serta ES pada berbagai tingkat signifikansi terutama pada tingkat keyakinan 90%. Integrasi dengan pendekatan copula, khususnya copula t dan copula Clayton, terbukti efektif dalam menangkap ketergantungan non-linear antar return saham. Prediksi VaR dan ES berbasis copula memberikan nilai risiko yang lebih realistis, sehingga kombinasi model MAGARCH(normal) dan copula merupakan pendekatan yang komprehensif untuk mengukur risiko portofolio. Kelebihan penelitian ini terletak pada kemampuan model untuk memotret volatilitas dan struktur ketergantungan secara lebih rinci. Namun, penelitian ini memiliki keterbatasan karena hanya menggunakan dua saham

dan periode data tertentu, sehingga generalisasi hasil perlu diuji lebih lanjut. Pengembangan ke depan dapat diarahkan pada penerapan model serupa pada portofolio yang lebih luas, periode data yang lebih panjang, serta eksplorasi copula lain untuk menguji konsistensi hasil dan meningkatkan robustitas prediksi risiko.

Daftar Pustaka

- [1] J. A. Alzyadat, A. A. Abuhommous, and H. Alqaralleh, "Testing the Conditional Volatility of Saudi Arabia Stock Market: Symmetric and Asymmetric Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (Garch) Approach," *Acad. Account. Financ. Stud. J.*, vol. 25, no. 2, pp. 1–9, 2021.
- [2] E. Koo and G. Kim, "A Hybrid Prediction Model Integrating GARCH Models With a Distribution Manipulation Strategy Based on LSTM Networks for Stock Market Volatility," *IEEE Access*, vol. 10, pp. 34743–34754, 2022, doi: 10.1109/ACCESS.2022.3163723.
- [3] K. Jiang, L. Zeng, J. Song, and Y. Liu, "Forecasting Value-at-Risk of cryptocurrencies using the time-varying mixture-accelerating generalized autoregressive score model," *Res. Int. Bus. Financ.*, vol. 61, no. September 2020, p. 101634, 2022, doi: 10.1016/j.ribaf.2022.101634.
- [4] N. Nurhayati, W. Apriani, and A. W. Bustan, "Value at Risk Prediction for the GJR-GARCH Aggregation Model," *Pattimura Int. J. Math.*, vol. 1, no. 1, pp. 01–06, 2022, doi: 10.30598/pijmathvol1iss1pp01-06.
- [5] Y. Musa, I. E. Etuk, and S. U. Gulumbe, "Efficiency and Consistency Assessment of Value at Risk Methods for Selected Banks Data," *J. Adv. Math. Comput. Sci.*, vol. 35, no. 2, pp. 1–11, 2020, doi: 10.9734/jamcs/2020/v35i230245.
- [6] D. Susanti, S. Sukono, and M. J. Verrany, "Value-at-Risk Estimation Method Based on Normal Distribution, Logistics Distribution and Historical Simulation," *Oper. Res. Int. Conf. Ser.*, vol. 1, no. 1, pp. 13–18, 2020, doi: 10.47194/orics.v1i1.19.
- [7] Q. Chen, R. Gerlach, and Z. Lu, "Bayesian Value-at-Risk and expected shortfall forecasting via the asymmetric Laplace distribution," *Comput. Stat. Data Anal.*, vol. 56, no. 11, pp. 3498–3516, 2012, doi: 10.1016/j.csda.2010.06.018.
- [8] M. McAleer, "Asymmetry and leverage in conditional volatility models," *Econometrics*, vol. 2, no. 3, pp. 145–150, 2014, doi: 10.3390/econometrics2030145.
- [9] F. Aliyev, R. Ajayi, and N. Gasim, "Modelling asymmetric market volatility with univariate GARCH models: Evidence from Nasdaq-100," *J. Econ. Asymmetries*, vol. 22, no. September 2019, p. e00167, 2020, doi: 10.1016/j.jeca.2020.e00167.
- [10] B. Dinga, J. H. Claver, K. K. Cletus, and S. F. Che, "Modeling and Predicting Exchange Rate Volatility: Application of Symmetric GARCH and Asymmetric EGARCH and GJR-GARCH Models," *J. Cameroon Acad. Sci.*, vol. 19, no. 2, pp. 155–178, 2023, doi: 10.4314/jcas.v19i2.6.
- [11] R. S. Tsay, *Analysis of financial time series (3rd ed.)*. New York, NY, USA: United States of America: John Wiley & Sons, Inc., 2010.
- [12] R. F. Engle, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation," *Econometrica*, vol. 50, no. 4, pp. 987–1007, 1982, doi: <https://doi.org/10.2307/1912773>.
- [13] T. Bollerslev, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity," *J. Econom.*, vol. 31, no. 3, pp. 307–327, 1986, doi: [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1).
- [14] J. B. Horpestad, Š. Lyócsa, P. Molnár, and T. B. Olsen, "Asymmetric volatility in equity

- markets around the world," *North Am. J. Econ. Financ.*, vol. 48, no. December 2017, pp. 540–554, 2019, doi: 10.1016/j.najef.2018.07.011.
- [15] S. Kumar, A. Anand, R. Birau, B. K. Meher, S. Kumar, and F. Ion, "Temporal Analysis of Mexico Stock Market Index Volatility using GJR-GARCH model," *Rev. Științe Polit. Rev. des Sci. Polit. No. 79*, vol. 2023, no. 79, pp. 46–56, 2023.
- [16] L. R. Glosten, R. Jagannathan, and D. E. Runkle, "On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks," *J. Finance*, vol. 48, no. 5, pp. 1779–1801, 1993, doi: <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x>.
- [17] J. M. Zakoian, "Threshold heteroskedastic models," *J. Econ. Dyn. Control*, vol. 18, no. 5, pp. 931–955, 1994, doi: 10.1016/0165-1889(94)90039-6.
- [18] F. Fornari and A. Mele, "Modeling the changing asymmetry of conditional variances," *Econ. Lett.*, vol. 50, no. 2, pp. 197–203, 1996, doi: 10.1016/0165-1765(95)00736-9.
- [19] M. Rockinger and M. Crouhy, "Volatility Clustering, Asymmetry and Hysteresis in Stock Returns: International Evidence," *Financ. Eng. Japanese Mark.*, vol. 4, no. 1990, pp. 1–35, 1997.
- [20] R. F. Engle and A. J. Patton, "What good is a volatility model?," *Quant. Financ.*, vol. 1, no. 2, pp. 237–245, 2001, doi: 10.1088/1469-7688/1/2/305.
- [21] M. Asai and M. McAleer, "Asymmetry and leverage in stochastic volatility models: An exposition," *MODSIM05 - Int. Congr. Model. Simul. Adv. Appl. Manag. Decis. Making, Proc.*, pp. 2283–2287, 2005.
- [22] A. J. McNeil and R. Frey., *Quantitative Risk Management*. Princeton: NJ: Princeton University Press., 2005.